

# 因式分解的应用

## 一、知识回顾

### 因式分解

把一个\_\_\_\_\_化成了几个\_\_\_\_\_的形式，像这样的式子变形叫做这个多项式的\_\_\_\_\_，也叫做把这个多项式\_\_\_\_\_。

基本解法：①\_\_\_\_\_②\_\_\_\_\_  
③\_\_\_\_\_④\_\_\_\_\_

#### 【教法备注】

把一个多项式化成了几个整式的积的形式，像这样的式子变形叫做这个多项式的因式分解，也叫做把这个多项式分解因式。

#### 【基本解法】

- ①提公因式法
- ②公式法
- ③十字相乘法
- ④分组分解法

#### 【解题方法】

首先提取公因式，然后考虑用公式；

十字相乘试一试，分组分解要合适；

几种方法反复试，结果必是连乘式。

#### 【总结】

遇到二项式，想到提取公因式和或用平方差公式；

遇到三项式，想到完全平方公式和十字相乘；

遇到四项式，想到分组分解，可以二二分，可以一三分；

遇到五项式，只能二三分；

遇到六项式，三三分，二二二分，一二三分都试一试。

1. 下列各式从左到右的变形中，属于因式分解的是（ ）。

A.  $a(m+n) = am + an$

B.  $a^2 - b^2 - c^2 = (a+b)(a-b) - c^2$

C.  $10x^2 - 5x = 5x(2x - 1)$

D.  $x^2 - 16 + 6x = (x + 4)(x - 4) + 6x$

【答案】C

【解析】A 选项： $a(m + n) = am + an$ 是整式乘法，不是因式分解；

B 选项： $a^2 - b^2 - c^2 = (a + b)(a - b) - c^2$ 不是因式分解；

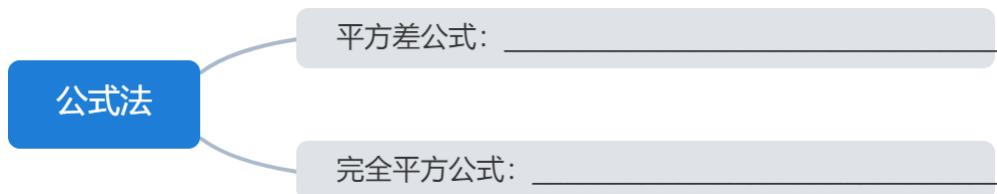
C 选项： $10x^2 - 5x = 5x(2x - 1)$ 是因式分解；

D 选项： $x^2 - 16 + 6x = (x + 4)(x - 4) + 6x$ 不是因式分解；

故选 C.

【标注】【知识点】判断因式分解结果是否正确

## 二、公式法的应用



### 平方差公式

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

两个数的平方差，等于这两个数的和与这两个数的差的积

【教法备注】

【特点】

- ①公式左边形式上是一个二项式，且两项的符号相反；
- ②每一项都可以化成某个数或式的平形式；
- ③右边是这两个数或式的和与它们差的积，相当于两个一次二项式的积。

### 完全平方公式

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2; a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

两个数平方和加上（或减去）这两个数的积的2倍，等于这两个数的和（或差）的平方

### 【教法备注】

### 【特点】

- ①左边相当于一个二次三项式；
- ②左边首末两项符号相同且均能写成某个数或式的完全平方；
- ③左边中间一项是这两个数或式的积的2倍，符号可正可负；
- ④右边是这两个数或式的和（或差）的完全平方，其和或差由左边中间一项的符号决定。

### || 例题

2. 若  $m - n = 3$ ,  $mn = -2$ , 则  $m^3n - 2m^2n^2 + mn^3$  的值为 \_\_\_\_\_ .

【答案】 -18

【解析】 
$$\begin{aligned} m^3n - 2m^2n^2 + mn^3 &= mn(m^2 - 2mn + n^2) \\ &= mn(m - n)^2, \\ \because m - n &= 3, mn = -2, \\ \therefore \text{原式} &= -2 \times 3^2 \\ &= -2 \times 9 \\ &= -18. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】整式乘除化简求值-条件化简求值

3. 已知  $\triangle ABC$  的两边分别为  $a$ 、 $b$ ，满足  $a^4 + b^4 - 2a^2b^2 = 0$ ，判断  $\triangle ABC$  的形状是 \_\_\_\_\_ .（选填“等腰”或“等边”）

【答案】 等腰

【标注】【知识点】因式分解的应用

4. 已知  $\triangle ABC$  是等腰三角形，且它的两边长  $a$ 、 $b$  满足  $a^2 + b^2 - 4a - 8b + 20 = 0$ ，则这个三角形的周长为 \_\_\_\_\_ .

【答案】 10

【解析】  $\because a^2 + b^2 - 4a - 8b + 20$   
 $= (a^2 - 4a + 4) + (b^2 - 8b + 16)$   
 $= (a - 2)^2 + (b - 4)^2,$   
 $a^2 + b^2 - 4a - 8b + 20 = 0,$   
 $\therefore \begin{cases} a - 2 = 0 \\ b - 4 = 0 \end{cases},$   
 $\therefore \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases},$   
 $\therefore \triangle ABC$  的三边长为  $a, b, c,$   
 $\therefore b - a < c < a + b,$  即  $2 < c < 6,$   
 $\therefore \triangle ABC$  是等腰三角形,  
 $\therefore c = 4,$   
 $\therefore a + b + c = 2 + 4 + 4 = 10,$   
故答案为: 10.

【标注】【知识点】因式分解的应用

5. 计算:  $\frac{20182017^2}{20182016^2 + 20182018^2 - 2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】  $\frac{1}{2}$

【解析】  $\frac{20182017^2}{20182016^2 + 20182018^2 - 2}$   
 $= \frac{20182017^2}{20182016^2 - 1 + 20182018^2 - 1}$   
 $= \frac{20182017^2}{20182017 \times 20182015 + 20182019 \times 20182017}$   
 $= \frac{20182017 \times (20182015 + 20182019)}{20182017^2}$   
 $= \frac{20182017^2 \times 2}{20182017^2}$   
 $= \frac{1}{2}.$

【标注】【知识点】因式分解的应用

6. 已知  $a = 2018x + 2018, b = 2018x + 2019, c = 2018x + 2020,$  则  $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$  的值是 ( ).

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】 D

【解析】  $\because a = 2018x + 2018, b = 2018x + 2019, c = 2018x + 2020,$

$$\therefore a - b = -1, a - c = -2, b - c = -1,$$

$$\begin{aligned} \text{则原式} &= \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc) \\ &= \frac{1}{2}[a^2 - 2ab + b^2 + (a^2 + 2ac + c^2) + (b^2 - 2bc + c^2)] \\ &= \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2] \\ &= \frac{1}{2} \times [1 + 4 + 1] \\ &= 3. \end{aligned}$$

故选D.

【标注】 【知识点】 配方思想的运用

7. 下面是某同学对多项式 $(x^2 - 4x + 2)(x^2 - 4x + 6) + 4$ 进行因式分解的过程.

解：设 $x^2 - 4x = y$ ,

$$\text{原式} = (y + 2)(y + 6) + 4$$

$$= y^2 + 8y + 16$$

$$= (y + 4)^2$$

$$= (x^2 - 4x + 4)^2.$$

(1) 该同学因式分解的结果是否彻底? \_\_\_\_\_. (填“彻底”或“不彻底”)若不彻底,请直接写出因式分解的最后结果 \_\_\_\_\_.

(2) 请你模仿以上方法尝试对多项式 $(x^2 - 2x)(x^2 - 2x + 2) + 1$ 进行因式分解.

【答案】 (1) 不彻底;  $(x - 2)^4$

(2)  $(x - 1)^4$ .

【解析】 (1) 设 $x^2 - 4x = y$ ,

$$\text{原式} = (y + 2)(y + 6) + 4$$

$$= y^2 + 8y + 16$$

$$\begin{aligned}
 &= (y+4)^2 \\
 &= (x^2 - 4x + 4)^2 \\
 &= (x-2)^4. \\
 (2) & (x^2 - 2x)(x^2 - 2x + 2) + 1, \\
 & \text{设 } x^2 - 2x = y, \\
 & \text{原式} = y(y+2) + 1 \\
 &= y^2 + 2y + 1 \\
 &= (y+1)^2 \\
 &= (x^2 - 2x + 1)^2 \\
 &= [(x-1)^2]^2 \\
 &= (x-1)^4.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】公式法综合应用

8. 因式分解： $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 1 = ( )$  .

A.  $(x^2 + 5x + 5)^2$

B.  $(x^2 + 5x + 6)(x^2 + 5x + 4)$

C.  $(x+2)^2(x+3)^2$

D.  $(x^2 + 5x + 3)^2$

【答案】A

【解析】 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 1 = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + 1 = (x^2 + 5x + 5)^2$

【标注】【知识点】因式分解的应用

## 练习

9. 已知 $a, b, c$ 是 $\triangle ABC$ 的三边，试说明 $(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2$ 的值一定是负数.

【答案】证明见解析.

【解析】 $\because (a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2$

$$= (a^2 + b^2 - c^2)^2 - (2ab)^2$$

$$= (a^2 + b^2 - c^2 + 2ab)(a^2 + b^2 - c^2 - 2ab)$$

$$= [(a^2 + 2ab + b^2) - c^2][(a^2 - 2ab + b^2) - c^2]$$

$$= [(a + b)^2 - c^2][(a - b)^2 - c^2]$$

$$= (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a - b - c),$$

$\because a, b, c$  是  $\triangle ABC$  的三边,

$$\therefore a + b + c > 0, a + b - c > 0, a - b - c < 0, a - b + c > 0,$$

$$\therefore (a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2$$

$$= (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a - b - c) < 0,$$

$\therefore (a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2$  的值一定是负数.

【标注】【知识点】因式分解的应用

10. 若  $a, b, c$  满足  $a^2 - 6b = -14, b^2 - 8c = -23, c^2 - 4a = 8$ , 则  $a + b + c$  的值是 ( ).

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

【答案】D

【解析】 $\because a^2 - 6b = -14, b^2 - 8c = -23, c^2 - 4a = 8,$

$$\therefore a^2 - 6b + b^2 - 8c + c^2 - 4a = -14 - 23 + 8,$$

$$\text{可化为 } (a - 2)^2 + (b - 3)^2 + (c - 4)^2 = 0,$$

$$\therefore a = 2, b = 3, c = 4,$$

$$\therefore a + b + c = 9.$$

【标注】【知识点】因式分解的应用

11. 已知  $a, b, c$  是  $\triangle ABC$  的三边长, 且有  $a^2 + 2b^2 + c^2 = 2b(a + c)$ , 试判断三角形的形状.

【答案】等边三角形 .

【解析】 $\because a^2 + 2b^2 + c^2 - 2b(a + c) = 0$  ,  
 $\therefore a^2 + 2b^2 + c^2 - 2ab - 2bc = 0$  ,  
 $\therefore (a - b)^2 + (b - c)^2 = 0$  ,  
 $\therefore a = b$  且  $b = c$   
即 :  $a = b = c$  ,  
故此三角形为等边三角形 .

【标注】【知识点】因式分解的应用

12. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 $a$ 、 $b$ 、 $c$  , 且 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 满足等式 $3(a^2 + b^2 + c^2) = (a + b + c)^2$  , 则该三角形是 \_\_\_\_\_ 三角形 .

【答案】等边

【解析】 $3(a^2 + b^2 + c^2) = (a + b + c)^2$  ,  
 $3a^2 + 3b^2 + 3c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$   
 $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc = 0$  ,  
 $(a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ac + c^2) + (b^2 - 2bc + c^2) = 0$  ,  
 $(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 = 0$  ,  
 $\therefore (a - b)^2 \geq 0$  ,  $(a - c)^2 \geq 0$  ,  $(b - c)^2 \geq 0$  ,  
 $\therefore a - b = 0$  ,  $a - c = 0$  ,  $b - c = 0$  ,  
 $\therefore a = b = c$  ,  
 $\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形 .

【标注】【知识点】配方思想的运用

13. 若 $n$ 为正整数 , 求证 :  $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$ 是个完全平方数 .

**【答案】**证明见解析 .

**【解析】**原式 =  $(n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1$  ,

$$\text{令 } n^2 + 3n = t ,$$

$$\text{原式} = t(t + 2) + 1$$

$$= (t + 1)^2 ,$$

$$\therefore \text{原式} = (n^2 + 3n + 1)^2 .$$

**【标注】**【知识点】因式分解的应用

14. 已知  $a$ 、 $b$ 、 $c$  满足  $a - b = 8$  ,  $ab + c^2 + 16 = 0$  , 求  $a + b + c$  得值 .

**【答案】**  $a + b + c = 0$  .

**【解析】**  $\because a - b = 8$  ,

$$\therefore a = 8 + b ,$$

$$\because ab + c^2 + 16 = 0 ,$$

$$\therefore (8 + b) \cdot b + c^2 + 16 = 0 ,$$

$$\therefore b^2 + 8b + 16 + c^2 = 0 ,$$

$$\text{即} : (b + 4)^2 + c^2 = 0 ,$$

$$\therefore (b + 4)^2 \geq 0 , c^2 \geq 0 ,$$

$$\therefore b = -4 , c = 0 ,$$

$$\therefore a = 4 ,$$

$$\therefore a + b + c = 4 + (-4) + 0 = 0 .$$

**【标注】**【知识点】配方思想的运用

15. 有一种用“因式分解”法产生的密码记忆法 , 方法是 : 取一个多项式 , 如 :  $x^4 - y^4$  , 将此多项式因式分解的结果是 :  $(x + y)(x - y)(x^2 + y^2)$  . 再取两个值 , 如 :  $x = 9, y = 7$  , 那么各个因式的值是 :  $(x + y) = 16, (x - y) = 2, (x^2 + y^2) = 130$  , 于是就可以把“162130”作为一个六位数密

码. 如果取多项式 $x^3 - xy^2$ 以及 $x = 20, y = 2$ , 那么下列密码不可能是用上述方法产生的是 ( ) .

A. 221820

B. 222018

C. 222180

D. 201822

【答案】C

【解析】原式 $= x(x^2 - y^2) = x(x + y)(x - y)$ ,

可以不同表示为 $x(x - y)(x + y)$ 、 $(x + y)x(x - y)$ 、 $(x - y)x(x + y)$ 、

$(x - y)(x + y)x$ 、 $(x + y)(x - y)x$ ,

故选C.

【标注】【知识点】因式分解的应用

### 三、分组分解法的应用

将一个 \_\_\_\_\_ 分为 \_\_\_\_\_ 或 \_\_\_\_\_ 组, 各组分别分解后, 彼此又有 \_\_\_\_\_ 或者可以用 \_\_\_\_\_, 这就是分组分解法.

【教法备注】

将一个多项式分为二或三组, 各组分别分解后, 彼此又有公因式或者可以用公式, 这就是分组分解法.

|       |                                                                                                                                                                           |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 四项式分组 | 二二分组: 分组后各组分别用 _____ 或 _____, 最后再 _____<br>一三分组: “三”一定是 _____, “一”一定是 _____, 最后再用 _____                                                                                   |
| 五项式分组 | 只能“二三”分组: “二”用 _____ 或 _____ 分解, “三”用 _____ 或 _____ 进行分解, 最后再 _____                                                                                                       |
| 六项式分组 | 三三分组: 分组后各组分别用 _____ 或 _____ 进行分解, 最后再 _____<br>二二二分组: 分组后各组分别用 _____ 或 _____, 最后再 _____<br>一二三分组: “二”用 _____ 或 _____ 分解, “三”用 _____ 或 _____ 进行分解, 最后再 _____ 或 _____ 进行分解 |

【教法备注】

|       |                                                                                                                                       |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 四项式分组 | 二二分组：分组后各组分别用平方差或提公因式，最后再提公因式<br>一三分组：“三”一定是完全平方公式，“一”一定是完全平方数，最后再用平方差                                                                |
| 五项式分组 | 只能“二三”分组：<br>“二”用平方差或提公因式分解，“三”用十字相乘或完全平方公式进行分解，最后再提公因式                                                                               |
| 六项式分组 | 三三分组：分组后各组分别用十字相乘或完全平方公式进行分解，最后再提公因式<br>二二二分组：分组后各组分别用平方差或提公因式，最后再提公因式<br>一二三分组：“二”用平方差或提公因式分解，“三”用十字相乘或完全平方公式进行分解，最后再十字相乘或完全平方公式进行分解 |

### || 例题

16.  $2016 \times 2016 - 2016 \times 2015 - 2015 \times 2014 + 2015 \times 2015$  的值为 ( ) .

- A. 1                      B. -1                      C. 4032                      D. 4031

**【答案】** D

**【解析】**  $2016 \times 2016 - 2016 \times 2015 - 2015 \times 2014 + 2015 \times 2015$   
 $= 2016 \times (2016 - 2015) + 2015 \times (2015 - 2014)$   
 $= 2016 + 2015$   
 $= 4031 .$

**【标注】**【知识点】因式分解的应用

17. 若  $a$ 、 $b$ 、 $c$  是三角形三边的长，则代数式  $a^2 - 2ab - c^2 + b^2$  的值 ( )

- A. 大于0                      B. 等于0                      C. 小于0                      D. 以上均有可能

**【答案】** C

**【解析】**  $\because a^2 - 2ab - c^2 + b^2$

$$\begin{aligned}
&=a^2-2ab+b^2-c^2 \\
&=(a-b)^2-c^2 \\
&=(a-b+c)(a-b-c), \\
&\because a、b、c \text{ 是三角形三边的长,} \\
&\therefore a-b+c>0, a-b-c<0, \\
&\therefore a^2-2ab-c^2+b^2<0, \\
&\text{故选C.}
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】因式分解的应用

18. 已知关于 $x$ 的多项式 $2x^3 - x^2 - 13x + k$ 分解因式后的一个因式为 $(2x + 1)$ , 求 $k$ 的值, 并将这个多项式进行因式分解.

【答案】 $k = -6$ ,  $(2x + 1)(x - 3)(x + 2)$ .

【解析】设因式分解的另一个因式为 $x^2 + ax + b$ ,

$$\begin{aligned}
&\text{则}(2x + 1)(x^2 + ax + b) = 2x^3 + 2ax^2 + 2bx + x^2 + ax + b, \\
&= 2x^3 + (2a + 1)x^2 + (2b + a)x + b, \\
&= 2x^3 - x^2 - 13x + k, \\
&\therefore \begin{cases} 2a + 1 = -1 \\ 2b + a = -13 \\ k = b \end{cases}, \\
&\therefore \begin{cases} a = -1 \\ b = -6 \end{cases}, \\
&\therefore k = -6, \\
&\therefore 2x^3 - x^2 - 13x - 6 = (2x + 1)(x^2 - x - 6), \\
&= (2x + 1)(x - 3)(x + 2).
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】因式分解的应用

【重点强调】

19. 若 $a, b, c$ 分别为 $\triangle ABC$ 的三边长, 且满足 $a^2b - a^2c + b^3 - b^2c = 0$ , 试判断三角形的形状.

**【答案】**  $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

**【解析】**  $\because a^2b - a^2c + b^3 - b^2c = 0$ ,  
 $a^2(b - c) + b^2(b - c) = 0$ ,  
 $(a^2 + b^2)(b - c) = 0$ ,  
 $\therefore a^2 + b^2 = 0$ 或 $b - c = 0$ .  
 $\because a^2 + b^2 \neq 0$ ,  
 $\therefore b - c = 0$ ,  
 $\therefore b = c$ ,  
 $\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形.

**【标注】**【知识点】因式分解的应用

**【重点强调】**

2019~2020学年10月天津南开区天津市育贤中学初二上学期月考第21题5分

20. 已知 $a > b > c$ ,  $M = a^2b + b^2c + c^2a$ ,  $N = ab^2 + bc^2 + ca^2$ , 则 $M$ 与 $N$ 的大小关系是( ).

- A.  $M < N$                       B.  $M > N$                       C.  $M = N$                       D. 不能确定

**【答案】** B

**【解析】**  $M - N = a^2b + b^2c + c^2a - (ab^2 + bc^2 + ca^2)$   
 $= (b - c)a^2 - (b^2 - c^2)a + (b^2c - bc^2)$   
 $= (b - c)a^2 - (b + c)(b - c)a + bc(b - c)$   
 $= (b - c)[a^2 - (b + c)a + bc]$   
 $= (b - c)(a - b)(a - c)$ ,  
 $\because a > b > c$ ,

$$\begin{aligned}\therefore b-c > 0, a-b > 0, a-c > 0, \\ \therefore M-N &= (b-c)(a-b)(a-c) > 0, \\ \therefore M &> N.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】因式分解的应用

21.  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 是正整数，并且满足等式 $abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1 = 2004$ ，求 $a + b + c$ 的最小值。

【答案】171。

【解析】 $abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1$   
 $= (abc + ab) + (ac + bc + a + b) + (c + 1)$   
 $= ab(c + 1) + (a + b)(c + 1) + (c + 1) = (ab + a + b + 1)(c + 1)$   
 $= (a + 1)(b + 1)(c + 1)$ 。  
 $\therefore (a + 1)(b + 1)(c + 1) = 2^2 \times 3 \times 167$ ，  
 $\therefore a = 3, b = 2, c = 166$ ，  
 $\therefore a + b + c = 171$ 。

【标注】【知识点】分组分解法

22. 黑板上写有 $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{100}$ 共100个数字，每次操作先从黑板上的数中选取两个数 $a, b$ ，然后删去 $a, b$ ，并在黑板上写上数 $a + b + ab$ ，则经过99次操作后黑板上剩下的数是（ ）。

A. 2012                      B. 101                      C. 100                      D. 99

【答案】C

【解析】由 $a + b + ab + 1 = (a + 1)(b + 1)$ 得，每次操作前和操作后，黑板上的每个数加1后的乘积不变，  
 设经过99次操作后黑板上剩下的数为 $x$ ，

则  $x + 1 = (1 + 1)(\frac{1}{2} + 1)(\frac{1}{3} + 1) \cdots (\frac{1}{100} + 1)$  ,  
解得  $x = 100$  .

【标注】【知识点】因式分解的应用

### 练习

23. 已知  $a, b, c$  是  $\triangle ABC$  的三条边, 且满足  $a^2 - b^2 = c(a - b)$ , 则  $\triangle ABC$  是 ( ) .

- A. 锐角三角形      B. 钝角三角形      C. 等腰三角形      D. 等边三角形

【答案】C

【解析】已知等式变形得:  $(a + b)(a - b) - c(a - b) = 0$  ,

即  $(a - b)(a + b - c) = 0$  ,

$\because a + b - c \neq 0$  ,

$\therefore a - b = 0$  , 即  $a = b$  ,

则  $\triangle ABC$  为等腰三角形 .

故选C .

【标注】【知识点】因式分解的应用

24. 常用的分解因式的方法有提取公因式法、公式法及十字相乘法, 但有更多的多项式只用上述方法就无法分解, 如  $x^2 - 4y^2 - 2x + 4y$ , 我们细心观察这个式子就会发现, 前两项符合平方差公式, 后两项可提取公因式, 前后两部分分别分解因式后会产生公因式, 然后提取公因式就可以完成整个式子的分解因式了 .

过程为:  $x^2 - 4y^2 - 2x + 4y = (x + 2y)(x - 2y) - 2(x - 2y) = (x - 2y)(x + 2y - 2)$  , 这种分解因式的方法叫分组分解法 .

利用这种方法解决下列问题:

( 1 ) 分解因式  $x^2 - 2xy + y^2 - 16$  .

( 2 )  $\triangle ABC$  三边  $a, b, c$  满足  $a^2 - ab - ac + bc = 0$  , 判断  $\triangle ABC$  的形状 .

**【答案】** ( 1 )  $(x - y + 4)(x - y - 4)$

( 2 )  $\triangle ABC$ 为等腰三角形 .

**【解析】** ( 1 )  $x^2 - 2xy + y^2 - 16$

$$= (x - y)^2 - 4^2$$

$$= (x - y + 4)(x - y - 4) .$$

( 2 )  $\because a^2 - ab - ac + bc$

$$= a(a - b) - c(a - b)$$

$$= (a - b)(a - c)$$

$$= 0 ,$$

$$\therefore a = b \text{ 或 } a = c ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形 .

**【标注】**【知识点】分组分解法

**【重点强调】**

2015~2016学年天津河东区初二上学期期末第30题6分

25. 已知 $\triangle ABC$ 三边 $a$ 、 $b$ 、 $c$  , 满足条件 $a^2c - a^2b + ab^2 - b^2c + c^2b - ac^2 = 0$  , 试判断 $\triangle ABC$ 的形状 , 并说明理由 .

**【答案】** 等腰三角形 .

**【解析】**  $(a^2c - a^2b) + (ab^2 - ac^2) + (bc^2 - b^2c) = 0 ,$

$$a^2(c - b) + a(b^2 - c^2) + bc(c - b) = 0 ,$$

$$a^2(c - b) + a(b - c)(b + c) + bc(c - b) = 0 ,$$

$$a^2(c - b) - a(c - b)(b + c) + bc(c - b) = 0 ,$$

$$(c - b)[a^2 - a(b + c) + bc] = 0 ,$$

$$(c - b)(a - b)(a - c) = 0 ,$$

$$\therefore c - b = 0 \text{ 或 } a - b = 0 \text{ 或 } a - c = 0 ,$$

$\therefore \triangle ABC$  为等腰三角形 .

【标注】【知识点】因式分解的应用

26. 已知等腰 $\triangle ABC$ 的三边长 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 均为整数，且满足 $a + bc + b + ca = 24$ ，则这样的三角形共有 \_\_\_\_\_ 个 .

【答案】3

【解析】原式 $= a(1 + c) + b(c + 1)$ ，  
 $= (a + b)(c + 1) = 24$ ，  
 $\therefore a$ 、 $b$ 、 $c$ 均为整数且是三角形的三条边，  
 $\therefore 12 \times 2 = 24$ ，  
 $8 \times 3 = 24$ ，  
 $6 \times 4 = 24$ ，  
 $\therefore$ 底边的长只能为 $c$ ，满足条件的三角形有3个，  
 $c = 1$ ， $a = b = 6$ ，  
 $c = 2$ ， $a = b = 4$ ，  
 $c = 3$ ， $a = b = 3$ ，  
故答案为3 .

【标注】【知识点】因式分解的应用

27. 已知 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、为 $\triangle ABC$ 的三边长，且 $a^2 + b^2 = 8a + 12b - 52$ ，其中 $c$ 是 $\triangle ABC$ 中最短的边长，且 $c$ 为整数，求 $c$ 的值 .

【答案】3 .

【解析】 $\because a^2 + b^2 = 8a + 12b - 52$ ，  
 $\therefore a^2 - 8a + 16 + b^2 - 12b + 36 = 0$ ，

$$\therefore (a-4)^2 + (b-6)^2 = 0,$$

$$\therefore a = 4, b = 6,$$

$$\therefore 6 - 4 < c < 6 + 4$$

$$\text{即 } 2 < c < 10,$$

$$\text{且 } c < 4.$$

$$\therefore \text{整数 } c \text{ 可取 } 3.$$

故答案为：3.

**【标注】**【知识点】三角形的三边关系

【知识点】求三角形第三边的取值范围

【知识点】分组分解法

【能力】运算能力

28. 已知 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 为 $\triangle ABC$ 三边的长.

(1) 求证： $a^2 - b^2 + c^2 - 2ac < 0$ .

(2) 当 $a^2 + 2b^2 + c^2 = 2b(a + c)$ 时，试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

**【答案】**(1) 证明见解析.

(2)  $\triangle ABC$ 为等边三角形.

**【解析】**(1)  $a^2 - b^2 + c^2 - 2ac = (a - c)^2 - b^2 = (a - c - b)(a - c + b) < 0$ .

(2)  $\because a^2 + 2b^2 + c^2 = 2b(a + c),$

$$\therefore (a - b)^2 + (b - c)^2 = 0,$$

$$\therefore a = b = c,$$

$\therefore \triangle ABC$ 等边三角形.

**【标注】**【知识点】因式分解的应用

【方法】配方法

29.

已知在 $\triangle ABC$ 中，三边长 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 满足等式 $a^2 - 16b^2 - c^2 + 6ab + 10bc = 0$ ．求证： $a + c = 2b$

【答案】证明见解析．

【解析】 $a^2 - 16b^2 - c^2 + 6ab + 10bc$   
 $= (a^2 + 6ab + 9b^2) - (25b^2 - 10bc + c^2)$   
 $= (a + 3b)^2 - (5b - c)^2$   
 $= (a + 8b - c)(a - 2b + c)$ ．  
 $\because a$ 、 $b$ 、 $c$ 为三角形三边长，  
 $\therefore a + b - c > 0$ ， $a + 8b - c = (a + b - c) + 7b > 0$ ．  
故由条件只有 $a - 2b + c = 0$ ， $a + c = 2b$ ．

【标注】【知识点】三角形的三边关系

 我学会了什么